Исследовательские задания к областному турниру юных математиков

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. Диофантово уравнение (Миротин А.Р.)

а) Предположим, что натуральные числа x, y, z и n удовлетворяет уравнению

$$x^3 + y^3 = z^n. \quad (1)$$

Докажите, что если z — простое, а $n \geq 3$, то x и y делятся на z.

б) Найдите все натуральные числа x, y, z, где z — простое, удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + y^3 = z^{2016},$$

если они существуют.

в) Найдите все натуральные числа x, y, z, где z — простое, удовлетворяющие уравнению

$$x^3 + y^3 = z^{2017},$$

если они существуют.

г) Для каждого натурального n найдите все натуральные числа x, y, z, где z — простое, удовлетворяющие уравнению (1), если они существуют.

д) Предложите свои обобщения.

2. Арифметические функции (Мурашко В.И.)

Во всей задаче известно разложение натурального числа n на простые делители

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Пусть f – функция. Обозначим сумму значений f в делителях n через $\sum_{d|n} f(d)$. Например,

$$\sum_{d|6} f(d) = f(1) + f(2) + f(3) + f(6)$$

1. Пусть i – целое неотрицательное число и

$$a_i(n) = \sum_{d|n} d^i$$

1.1 Докажите, что

$$a_0(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

$$a_1(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\dots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

1.2 Выведите общую формулу для $a_i(n)$.

1.3 Верно ли, что

$$\sum_{d|n}a_0(d)=\frac{a_0(n)a_0(n\cdot p_1\dots p_k)}{2^k}$$

1.4 Посчитайте в общем случае

$$\sum_{d|n}a_i(d)$$

2. Пусть i – натуральное число. Обозначим через $b_i(n)$ количество упорядоченных i-шек $(k_1,\dots,k_i)$ целых неотрицательных чисел, меньших *n*, таких, что НОД$(k_1,\dots,k_i,n)=1$. Например, $b_2(2)=3$ (двойки (1, 0) и (0, 1) – различные!).

2.1 Докажите, что

$$b_1(n)=p_1^{\alpha_1-1}\dots p_k^{\alpha_k-1}\cdot(p_1-1)\dots(p_k-1)$$

2.2 Функция *f* называется мультипликативной, если $f(k\cdot l)=f(k)\cdot f(l)$ для всех k,l таких, что НОД$(k,l)=1$. При каких *i* функция $b_i(n)$ мультипликативна.

2.3 Верно ли, что

$$\sum_{d|n}b_i(d)=n^i$$

2.4 Выведите общую формулу для $b_i(n)$.

3.

3.1 Докажите, что число *n* является простым тогда и только тогда, когда

$$a_1(n)+b_1(n)=n\cdot a_0(n)$$

3.2 Пусть *k*– натуральное число. Верно ли, что число *n* является простым тогда и только тогда, когда

$$a_k(n)+b_k(n)=n^k\cdot a_0(n)$$

4. Предложите свои обобщения.

3. Поговорим о языках (Симоненко Д.Н.)

1. Для шести ученых выяснилось, что из любых троих двое знают один и тот же язык и смогут общаться между собой. Докажите, что можно выбрать троих ученых так, что каждый из них сможет общаться с каждым.

2. Для девяти ученых выяснилось, что из любых троих двое знают один и тот же язык и смогут общаться между собой. При этом никто из них не знает более трех языков. Докажите, что можно выбрать троих ученых так, что все они говорят на одном языке.

3. Для девяти ученых выяснилось, что любые двое из них общаются между собой только на русском или только на английском языке. Докажите, что либо можно выбрать троих ученых так, что все они общаются друг с другом только на английском языке, либо можно выбрать четверых ученых так, что все они общаются друг с другом только на русском.

4. Для семнадцати ученых выяснилось, что любые двое из них общаются между собой только на русском, только на немецком или только на английском языке. Докажите, что можно выбрать троих ученых так, что все они общаются друг с другом на одном и том же языке.

5. Для восемнадцати ученых выяснилось, что любые двое из них общаются между собой только на русском или только на английском языке. Докажите, что можно выбрать четверых ученых так, что все они общаются друг с другом на одном и том же языке.

6. Для *n* ученых выяснилось, что любые двое из них общаются между собой только на одном из четырех языков. При каком наименьшем *n* можно выбрать троих ученых так, что все они общаются друг с другом на одном и том же языке.

7. Для n ученых выяснилось, что из любых троих двое знают один и тот же язык и смогут общаться между собой. При этом никто из них не знает более трех языков. При каком наименьшем n можно выбрать четверых ученых так, что все они общаются друг с другом на одном и том же языке.

8. Обобщите пункты 6 и 7, если требуется выбрать k ученых, где k любое натуральное число (Так, например, в шестом пункте $k = 3$, в седьмом $k = 4$). Получите зависимость $n = n(k)$.

9. Предложите свои обобщения задачи.

4. Признаки делимости (Горский С.М.)

Под суммой цифр числа $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1} = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1$, будем понимать сумму $a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$.

Под суммой блоков цифр длины m мы будем понимать сумму $A_k + A_{k-1} + \dots + A_2 + A_1$, где $A_1 = a_m \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot 10^{m-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1$, $A_2 = a_{2m} \cdot 10^{m-1} + a_{2m-1} \cdot 10^{m-2} + \dots + a_{m+2} \cdot 10 + a_{m+1}$ и т.д.

Под взвешенной суммой цифр (блоков цифр) с весами $p_1, p_2, \dots, p_k$ будем понимать сумму

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots a_k p_k + a_{k+1} p_1 + \dots + a_{2k} p_k + \dots$$
$$(A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_k p_k + A_{k+1} p_1 + \dots + A_{2k} p_k + \dots).$$

Если $p_1 = \pm 1$ и $p_{i+1} = -p_i$ для всех $i \geq 1$, то взвешенную сумму будем называть знакопеременной.

1. Докажите, что число делится на 3 тогда и только тогда, когда разность между количеством цифр 2, 5, 8 и количеством цифр 1, 4, 7 в записи числа делится на 3.
2. Докажите, что число делится на 37 тогда и только тогда, когда сумма блоков цифр длины 3 делится на 37.
3. Докажите, что для любого простого $p \geq 3$ существует m такое, что число делится на p, тогда и только тогда, когда сумма блоков цифр длины m делится на p.
4. Докажите, что число делится на 137 тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма блоков цифр длины 4 делится на 137.
5. Существует ли для любого простого числа $p \geq 3$ число m такое, что число делится на p тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма блоков цифр длины m делится на p.
6. Докажите, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда взвешенная сумма блоков длины 2 с весами $2, -3, 1$ делится на 7.
7. Докажите, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда взвешенная сумма блоков длины 2 с весами $1, 2, 4$ делится на 7.
8. Пусть $n = 10a + b$, где $b = a_1$, $a = a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3 \cdot 10 + a_2$. Докажите, что $10a + b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $a - 2b$ делится на 7.
9. Докажите, что для любого простого $p \geq 3$ существуют целые числа r, q, такие, что $10a + b$ делится на p тогда и только тогда, когда $ra + qb$ делится на p. Для каких простых p можно подобрать r и q так, чтобы $r = 1$ или $q = 1$.

5. Средние со смещением (Горский С.М.)

Для произвольного действительного p и положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ обозначим через $A_p(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{cases} \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0; \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, & p = 0. \end{cases}$ среднее степенное.

1. Докажите, что $A_{-1}(a+1, b+1) \geq 1 + A_{-1}(a, b)$.
2. Докажите, что для положительного числа α верно $A_{-1}(a+\alpha, b+\alpha) \geq \alpha + A_{-1}(a, b)$.
3. Докажите, что $A_2(a+1, b+1) \geq A_2(a, b) + \frac{1}{2}$.
4. Докажите, что для положительного числа α верно $A_2(a+\alpha, b+\alpha) \geq A_2(a, b) + \frac{\alpha}{2}$.

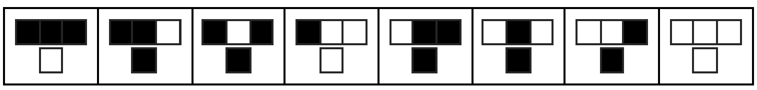
5. Найдите наибольшую константу C такую, что для любых положительных a, b и α было верно $A_2(a+\alpha, b+\alpha) \geq A_2(a,b) + C\alpha$.
6. Найдите все значения p, для которых верно $A_p(a+\alpha, b+\alpha) \geq A_p(a,b) + \alpha$.
7. Верен ли пункт 2 для большего количества переменных?
8. Обобщите пункт 5 на другие значения p.
9. Предложите свои обобщения.

6. Избавляемся от иррациональности (Горский С.М.)
Избавьтесь от иррациональности в знаменателе.
а) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$;
б) $\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;
в) $\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}$;
г) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$;
д) $\frac{1}{P_m(\sqrt[n]{2})}$, где $P_m(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, степени не ниже первой и не выше n;
е) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
ж) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$
Предложите алгоритм действий позволяющий избавляться от иррациональности в знаменателе в случаях подобным пунктам д) и е).

7. Клеточные автоматы
Рассмотрим ленту из клеток, сцепленных в кольцо. Каждая клетка может находиться в двух состояниях: быть черного цвета («живой») и белого цвета («мертвой»). Живую клетку будем обозначать 1, а мертвую — 0. Также есть правило, по которому, в следующий момент времени клетка меняет цвет. Набор из ленты и правила назовем *одномерным бинарным клеточным автоматом*.
Рассмотрим правила, по которым клетка меняет цвет в зависимости от собственного цвета и цвета двух соседних клеток. Понятно, что есть всего восемь комбинаций цветов трех клеток, а значит правил, по которым происходит смена цветов всего 256. В дальнейшем правила будем кодировать их порядковым номером от 0 до 255.
Что означает, например, правило 110? Чтобы это выяснить переведем 110 в двоичную систему счисления, при необходимости дополнив нулями слева до 8 знаков. $110_{10} = 01101110_2$. Впишем цифры двоичного представления числа 110 во вторую строчку таблицы:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	1	1	0	1	1	1	0

Наглядно это можно представить так:



Первая строчка таблицы не зависит от номера правила и содержит всевозможные состояния трех клеток.
То есть правило 110, например, мертвую клетку, которую окружают живые соседи, в следующий момент времени оживляет (третий столбец), и умерщвляет живую клетку, которую окружают живые соседи (первый столбец).

Сперва у нас есть набор клеток раскрашенных в черный («живые») и белые («мертвые») цвета. Далее рассматривая группы по три клетки, мы центральной из них на следующем шаге ставим в соответствие согласно правилу. Смена цветов происходит одновременно.

1. Сколько всего автоматов, если рассматривать зависимость не от трех клеток, а от 5 (самой клетки и двух соседей слева и справа)? Обобщите результат.
2. Докажите, что в правиле 184 после каждого шага количество «живых» клеток остается неизменным. Есть ли еще правила обладающие данным свойством?
3. Есть ли «обращаемые» правила? Т.е. если мы знаем расположение живых клеток на n-шаге, то можно ли узнать, что было на предыдущем шаге? Если нет таких правил для одномерных бинарных автоматов, то есть ли они для других одномерных автоматов, например у клеток которых не два возможных состояния, а три или больше?
4. Найдите все начальные состояния длины не больше 7 (т. е. раскраски ленты, сцепленной в кольцо, в которой не более 7 клеток) для которых правило 30 дает периодическую последовательность состояний.
5. Предложите свои обобщения.

8. Хорошо сидим…

А и Б сидят в тюрьме. Им предстоит испытание: есть n стаканов с водой, стоящих в ряд, причем k из них отравлены. Узники будут по очереди (начиная с А) выпивать один из стаканов, и если они смогут выпить все стаканы с неотравленные водой, то их отпустят. В начале испытания знакомый стражник сможет сообщить А, в каких стаканах яд, но передать эту информацию Б уже не удастся. Пока испытание не началось, узники хотят придумать стратегию по спасению их обоих (n и k им известны).

1. Всегда ли могут гарантировать себе спасение, если $k = 1$.
2. Существует ли стратегия спасения, если $n = 4$, $k = 2$.
3. Докажите, что при $n = 37$, $k = 25$ у А и Б нет стратегии спасения.
4. Сформулируйте стратегию спасения при $n = 12$, $k = 5$.
5. Докажите, что существует такое n, что при $k = \frac{3n}{5}$ у А и Б есть стратегия спасения.
6. Найдите все (n, k) при которых есть стратегия спасения у А и Б.

Задачи предложили: №1— А.Р. Миротин, №2— В.И. Мурашко, №3 — Д.Н. Симоненко, №№4–6 —С.М. Горский.