Исследовательские задания к областному турниру юных математиков (2025)

Обращаем ваше ***ВНИМАНИЕ*** на то, что предлагаемые задачи (задания!) носят исследовательский характер. Наилучшие обобщения и полные решения неизвестны даже их авторам, поэтому:

- хотя мы и ждем максимальных ВАШИХ обобщений, но во многих задачах интерес представляют даже *отдельные частные случаи*;
- возможно (это допускается и даже приветствуется) ВЫ *сможете усилить ряд утверждений*, приведенных непосредственно в формулировках задач;
- кроме рассмотрения исходной постановки *полезно исследовать свои направления*, причем совсем необязательно ваши обобщения должны совпадать с предложениями авторов задач;
- **КАЖДУЮ ЗАДАЧУ НЕОБХОДИМО ОФОРМИТЬ ОТДЕЛЬНО**: в распечатанном или аккуратно написанном от руки виде; при этом оформление каждой задачи должно начинаться **С ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**, на котором должны быть указаны номер задачи и ее название, название учреждения образования, город, автор(ы) исследования (решения); **НИЖЕ НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ** (или на втором листе) **обязательно дайте краткое резюме вашего исследования** – какие пункты вы решили, какие сделали обобщения, четко сформулируйте ВАШИ ГЛАВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ (утверждения, примеры, гипотезы), с указанием страниц в работе, где они приведены и доказаны (обоснованы);

кроме этого, дайте четкие ссылки на литературу и другие источники (Интернет и т.п.), которую вы использовали при проведении исследований (обычно в конце работы).

1. День рождения

Незадолго до 14 марта, своего дня рождения, Наташа представляла натуральные числа формулами, использующими только числа π, стандартные математические операции $+, -, \times, \div$, знаки взятия дробной и целой части и возведение в степень (например, $1 = [\pi^{\pi} \div \pi \times \{\pi\}]$). Зачем? Подарок достанется ей только в случае, если она посчитает минимальное количество экземпляров числа π, нужных для представления произвольного натурального числа n.

1) Помогите Наташе найти все числа, которые представляются с помощью

а) одного экземпляра числа π; **б)** двух экземпляров числа π.

2) Сможет ли Наташа представить число 10^{19} с помощью трех экземпляров числа π?

3) Докажите, что если $n > \pi^{\pi^{\cdots^{\pi}}}$ (k раз), то с помощью k или менее экземпляров числа π число n не представить.

4) Сможет ли Наташа с помощью 147-ми экземпляров числа π представить число **а)** 294; **б)** 202500?

5) Докажите, что Наташа может представить число n не более, чем за $2n$ экземпляров числа π.

6) Докажите, что для представления числа n Наташе потребуется не больше $(log_3 n+1)^2+1$ экземпляров числа π (напомним, что $log_3 x$ – это такое число, что $3^{log_3 x}=x$).

7) Продолжите путь Наташи к подарку.

2. Разрезай и властвуй

В данной задаче будут рассматриваться многоугольники, которые разрезаются на части или накладываются друг на друга так, что выполняются некоторые условия.

1. Прямоугольник *ABCD* с площадью 1 сложили по прямой так, что точка *C* совпала с *A*. Докажите, что площадь получившегося пятиугольника меньше ¾.

2. Прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам, так, что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого. Докажите, что отношение большей стороны прямоугольника к меньшей не менее 2.

3. Бумажный треугольник с углами 20°, 20°, 140° разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, один из которых также разрезается по биссектрисе, и так далее. Может ли после нескольких разрезов получиться треугольник, подобный исходному? Найдутся ли такие углы исходного треугольника, при которых при разрезании получится треугольник, подобный исходному? Найдите, по возможности, все такие углы или докажите, что их нет.

4. а) Торт имеет форму треугольника, в котором один угол в 3 раза больше другого. Коробка для торта имеет форму того же треугольника, но симметрична ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет (не переворачивая) уложить в эту коробку?

б) Та же задача для торта в форме тупоугольного треугольника, в котором тупой угол в 2 раза больше одного из острых углов. (Торт и коробку считайте плоскими фигурами.)

5. Верны ли утверждения:

а) Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.

б) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.

в) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга движением, сохраняющим ориентацию (то есть поворотом или параллельным переносом), то его можно разбить отрезком на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга таким же движением?

6. а) На столе лежат 5 одинаковых бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении, *не поворачивая*. Верно ли, что всегда каждый из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?

б) На столе лежат 5 одинаковых *равносторонних* бумажных треугольников. Каждый разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Докажите, что каждый из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими.

7. Выпуклый n-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (*перестройку*): взяв пару треугольников ABD и BCD с общей стороной, заменить их на треугольники ABC и ACD. Пусть $P(n)$ – наименьшее число *перестроек*, за которое можно перевести каждое разбиение в любое. Докажите, что **а)** $P(n) \geq n - 3$; **б)** $P(n) \leq 2n - 7$; **в)** $P(n) \leq 2n - 10$ при $n \geq 13$.

8. Предложите свои направления в задаче.

3. Гармоническая математика

I. Ряд вида $\sum_1^\infty \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ называется *гармоническим*. В данной задаче будет рассматриваться этот ряд и ряды, получаемые из него.

1. На доске выписаны числа 1, ½, ⅓, ..., $^1/_{100}$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число $a + b + ab$. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.

2. Можно ли получить формулу для пункта 1, если членов последовательности n, а ходов $n - 1$?

3. Можно ли из членов гармонического ряда 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... выбрать: **а)** 5 членов; **б)** n членов (сохраняя порядок) таких, что они образуют геометрическую прогрессию? Ответь обоснуйте.

4. Можно ли из членов гармонического ряда 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... выбрать: **а)** 5 членов; **б)** n членов (сохраняя порядок) таких, что они образуют арифметическую прогрессию? Ответ обоснуйте.

5. Можно ли из последовательности 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ... выбрать (сохраняя порядок) **а)** сто чисел, **б)** бесконечную подпоследовательность (часть членов исходной последовательности) чисел, из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k = a_{k-2} - a_{k-1}$)?

II. Ряд вида $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n}\right)^k = (1)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^k + \cdots$ будем называть ***k*-гармоническим**.

Ответьте на вопросы пунктов 1-5 для *k-гармонического* ряда.

III. Предложите свои обобщения и направления в задаче.

4. Эх, циркули-линейки

Буратино, как всегда, попал на пересдачу единственный на потоке. В этот раз экзамен был по геометрии и Буратино забыл взять с собой циркуль и линейку. Его учитель, Карабас Барабас, очень зол, что ему приходится приходить в университет ради одного человека, поэтому он решил брать с Буратино деньги за использование своих циркуля и линейки. В частности, Буратино может делать только следующие построения:

- Поставить случайную точку на плоскость/прямую/окружность - бесплатно
- Поставить точку в пересечении объектов - бесплатно
- Провести прямую через 2 точки - 1 золотой.
- Провести окружность по её центру и точке на ней - 1 золотой.

Помогите Буратино сдать экзамен! (Пожалуйста!!!)

Для каждого пункта найдите минимальные затраты на построение необходимой конструкции, алгоритм её построения, а также докажите, что нельзя обойтись меньшими затратами.

1. Даны две различные точки. Постройте серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему их.

2. Даны две различные точки. Постройте середину отрезка, соединяющего их.

3. Дана окружность. Постройте её центр.

4. Дана прямая и точка, не лежащая на ней. Постройте перпендикуляр, опущенный из точки на прямую.

5. Дана прямая и точка, лежащая на ней. Постройте перпендикуляр, восстановленный из точки на прямой.

6. Дана прямая и точка, не лежащая на ней. Постройте прямую, параллельную данной прямой и проходящую через данную точку.

7. Даны два различных луча, выходящие из одной точки. Постройте биссектрису угла между лучами.

8. Дана окружность и точка на ней. Постройте касательную к окружности, проходящую через заданную точку.

9. Дан квадрат. Постройте вписанную в него окружность.

10. Дана окружность, её центр и точка A, лежащая на окружности. Постройте квадрат, вписанный в эту окружность, одна из вершин которого - точка A.

11. Предложите свои обобщения к данной задаче и исследуйте их.

5. Авиапутешествия с ограничениями

На планете Ў4613 есть N городов. Пришельцы Матвей и Тимофей собираются связать их двусторонними авиарейсами. При этом не обязательно, чтобы из каждого города можно было добраться до каждого авиарейсами. За K_n обозначим множество из $n \geq 1$ городов такое, что каждые два соединены авиарейсами. Назовём простым циклом длины $n \geq 3$ и обозначим C_n, последовательность из n различных городов, в которой каждый следующий соединён с предыдущим (и последний с первым). Два простых цикла считаются различными, если в одном из них есть хотя бы один авиарейс, которого нет в другом.

Во всех пунктах ответ может зависеть от N. Во всех пунктах, даже если не был получен ответ, нахождение конфигурации, в которой максимальное число объектов достигается, уже представляет большой интерес.

1. К сожалению, Матвею не нравится, как выглядят пути длины 3, так что в получившейся системе авиарейсов их не будет. Какое наибольшее количество авиарейсов на планете может быть при таком условии? Путь длины 3 – три различных авиарейса таких, что второй начинается в городе, где заканчивается первый, а третий начинается там, где заканчивается второй.

2. Теперь Матвей запрещает строить простые циклы нечётной длины. Какое наибольшее количество авиарейсов на планете может быть? (В каждом пункте запреты из предыдущих пунктов не учитываются)

3. Матвей запрещает простые циклы нечётной длины. Какое наибольшее количество C_k может быть?

4. Тимофей не любит полные подграфы и запрещает K_3. Какое наибольшее количество авиарейсов может быть?

5. Тимофей запрещает K_4. Какое наибольшее количество авиарейсов? Какое наибольшее количество K_3?

6. Матвей запрещает C_4. Какое наибольшее количество авиарейсов? K_3?

7. Тимофей запрещает K_3. Какое наибольшее количество C_4? C_m?

8. Тимофей запрещает K_4. Какое наибольшее количество C_4? C_m?

9. Тимофей запрещает K_n. Какое наибольшее количество K_m? C_m?

10. Матвей запрещает C_n. Какое наибольшее количество K_m? C_m?

11. Изменится ли что-нибудь, если жители планеты потребуют, чтобы из каждого города можно было добраться до каждого авиарейсами?

12. Предложите свои обобщения и дополнения к данной задаче.

6. Кое-что о многочленах

Многочленом степени n от одной переменной x будем называть выражение вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

1. Приведите пример такого квадратного трехчлена $P(x)$, для которого выполняется равенство $P(x) + P(x+1) + P(x+2) + \cdots + P(x+10) = x^2$. Может ли данное равенство выполнятся для многочлена степени не равной 2 и тождественно не равного константе?

2. $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых a и b выполняется равенство: $P(a) - P(b) = 1$. Докажите, что a и b различаются на 1.

3. $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что найдётся коэффициент, который меньше –1. Сформулируйте подобное утверждение для произвольных корней многочлена n и k, если это возможно.

4. Существует ли такой многочлен $P(x)$, что у него есть отрицательный коэффициент, а все коэффициенты любой его степени $(P(x))^n$, $n > 1$, положительны? Ответ обоснуйте.

5. Приведите пример многочлена $P(x)$ степени 2001, для которого $P(x) + P(1 - x) \equiv 1$.

6. а) Разбейте отрезок $[0, 1]$ на чёрные и белые отрезки так, чтобы для любого многочлена $P(x)$ степени не выше второй сумма приращений $P(x)$ по всем чёрным отрезкам равнялась сумме приращений $P(x)$ по всем белым интервалам. (Приращением многочлена P по отрезку $[a, b]$ называется число $P(b) - P(a)$.)

б) Удастся ли проделать аналогичную операцию для всех многочленов степени не выше 2024?

7. Даны два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ натуральной степени, причём $P(P(x)) \equiv Q(Q(x))$ и $P(P(P(x))) \equiv Q(Q(Q(x)))$. Обязательно ли тогда $P(x) \equiv Q(x)$?

8. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами таков, что уравнение $P(m) + P(n) = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах m и n. Докажите, что у графика $y = P(x)$ есть центр симметрии.

9. Предложите свои направления и обобщения в данной задаче.

7. Перпендикуляры и площади

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется множество всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

S_{ABE} обозначается площадь треугольника ABE.

1. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник, a, b, c и d расстояния от точки I плоскости четырёхугольника до его сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Известно, что $a \times c = b \times d$. Верно ли, что все такие точки I лежат на окружности, описанной около $ABCD$?

2. Верно ли, что для любого вписанного пятиугольника $ABCDE$ выполняется условие $S_{ABE} \times S_{ECD} = S_{AED} \times S_{BEC}$?

3. Обозначим расстояния от точки I плоскости до прямых A_iA_{i+1} за a_i, где $i = \overline{1, 2n-1}$, и до прямой $A_{2n}A_1$ за a_{2n}, где $A_1A_2A_3\ldots A_{2n}$ – $2n$-угольник, вписанный в Ω, и $a_1 \times a_3 \times \ldots \times a_{2n-1} = a_2 \times a_4 \times \ldots \times a_{2n}$. Верно ли, что все такие точки I лежат на Ω?

4. Докажите, что произведение расстояний от любой точки окружности, описанной около четырёхугольника, до его противоположных сторон или их продолжений равны между собой.

5. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Докажите, что

$$S_{ABE} \times S_{ECD} = S_{AED} \times S_{BEC}$$

верно тогда и только тогда, когда

$$AB \times CD = BC \times AD.$$

6. $2n$-угольник вписан в окружность. Точка I принадлежит этой окружности. Примем обозначения из пункта 3. Докажите, что $a_1 \times a_3 \times \ldots \times a_{2n-1} = a_2 \times a_4 \times \ldots \times a_{2n}$.

7. Обобщите утверждение пункта 6 на вписанные многоугольники с нечётным числом сторон.

8. Возьмём обозначения из пункта 3. Найдите ГМТ I, таких, что $a_1 \times a_3 \times \ldots \times a_{2n-1} = a_2 \times a_4 \times \ldots \times a_{2n}$, где $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$ – правильный $2n$-угольник.

9. Возьмём обозначения из пункта 3. Найдите ГМТ I, таких, что $a_1 \times a_3 \times \ldots \times a_{2n-1} = a_2 \times a_4 \times \ldots \times a_{2n}$, где $A_1A_2A_3 \ldots A_{2n}$ – произвольный вписанный $2n$-угольник.

10. Предложите свои обобщения и направления в данной задаче.

8. Веселые неравенства

Для произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определим величину $S_k = a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k$ для каждого $k \in \mathbb{R}^+$.

Часть 1

1. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $S_2 < S_1 < S_3$. А есть ли набор из трёх чисел?

2. Существует ли такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 > S_2 > S_3 < S_4 < S_5 < \ldots$?

3. Существует ли такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 < S_2 < S_3 > S_4 > S_5 > \ldots$?

4. Существует ли для любого $k > 3$ такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 > S_2 > \ldots > S_k < S_{k+1} < \ldots$?

5. Существует ли для любого $k > 3$ такое n, что найдутся n положительных чисел, для которых выполняется неравенство $S_1 < S_2 < \ldots < S_k > S_{k+1} > \ldots$; $k > 3$?

6. Предложите свои обобщения к данной задаче и исследуйте их.

Часть 2

1. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $\sqrt{S_2} < \sqrt[3]{S_3}$? А есть ли набор из трёх чисел?

2. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $\sqrt[3]{S_3} < \sqrt[4]{S_4}$? А есть ли набор из трёх чисел?

3. Существует ли набор, состоящий из двух положительных чисел, что выполняется неравенство $\sqrt[n]{S_n} < \sqrt[n+1]{S_{n+1}}$, где $n \in \mathbb{N}, n > 3$? А есть ли набор из трёх чисел?

4. Выполняется ли всегда неравенство $\sqrt[n]{S_n} \geq \sqrt[m]{S_m}$, где $n, m \in \mathbb{N},\ n < m$, для произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; $k > 3$?

5. Выполняется ли всегда неравенство $\sqrt[r]{S_r} \geq \sqrt[t]{S_t}$, где $r, t \in \mathbb{R}^+,\ r < t$, для произвольного набора положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$; k – любое натуральное число?

6. Предложите свои обобщения к данной задаче и исследуйте их.